Л.И. Бородкин, А.Д. Волков, А.О. Короткевич, С.А. Плуготаренко, А.О. Прокофьев, С.Л. Сенченко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМЕ "НАРОД - ПРАВИТЕЛЬСТВО": МОДИФИКАЦИИ МОДЕЛИ ВАЙДЛИХА

Важный класс математических моделей, применяемых в исследованиях динамики социальных систем, основан на использовании дифференциальных уравнений. Если имеются основания считать, что предложенные уравнения достаточно адекватно описывают соотношения переменных в структуре изучаемого процесса, то математическое исследование построенной системы дифференциальных уравнений может позволить определить фазовые траектории, получить качественную картину поведения динамической системы [1].

Один из наиболее интересных подходов к моделированию динамики социальных систем предложил в последние годы профессор Штутгартского университета (ФРГ) В. Вайдлих. Он разработал систему моделей, содержащих макропеременные (например, показатели производства и потребления товаров, инвестиции, индикаторы политического процесса и т. д.) [2]. В рамках этого подхода достаточно интересные выводы о динамике развития социально-экономических и политических процессов можно получить, анализируя модели, описываемые всего двумя дифференциальными уравнениями, характеризующими кооперативное (при одних допущениях) или антагонистическое (при других) взаимодействие активной переменной x и пассивной y. Приложения модели Вайдлиха к анализу конкретных социальных процессов позволяют изучать их динамику на теоретическом уровне. Так, для объяснения длинных волн экономической конъюнктуры (волн Кондратьева) Вайдлих рассматривает конкурентные отношения между "молодыми", раз-

---

[1] В работе Л.И. Бородкина, где дается классификация математических моделей исторических процессов, эти модели относятся к аналитическим. См.: *Бородкин Л.И.* Компьютерное моделирование исторических процессов: еще раз о математических моделях // Круг идей: развитие исторической информатики. М., 1995. С.

[2] *Weidlich W.* Stability and Cyclicity in Social Systems // Behavioral Sciences, 1988. V. 33. P. 241-256. На русском языке краткое описание модели В.Вайдлиха появилось в книге: *Плотинский Ю.М.* Математическое моделирование динамики социальных процессов. М., 1992. (см. раздел 3.4 книги, материал которого частично используется нами при описании исходной модели Вайдлиха).

вивающимися отраслями производства, в которых широко используются инновационные технологии, и "зрелыми", стареющими отраслями. Модель воспроизводит четыре фазы кондратьевского цикла (процветание, спад, депрессия, восстановление). В другой постановке задачи, анализируя эволюцию социума, Вайдлих рассматривает взаимодействие пары "народ - правительство"; при этом переменная x соответствует степени влияния и участия в демократических процессах принятия решений народа, а переменная y - степени силы и власти правительства. Рассмотрение задачи в данной постановке позволило Вайдлиху прийти к выводу, что при известных условиях модель отражает существенные черты развития политического процесса в период перестройки и достаточно адекватно описывает политику президента СССР [1].

В данной работе предлагаются некоторые естественные модификации (обобщения) модели Вайдлиха. При этом в центре внимания авторов находится вопрос - в какой мере введение этих модификаций меняет качественное поведение динамической системы, насколько существенным с содержательной точки зрения является задание некоторых формальных параметров в системе уравнений Вайдлиха? Другими словами, мы исследуем устойчивость (в определенном смысле) рассматриваемой модели [2].

Модель Вайдлиха: кооперативное и антагонистическое взаимодействие

В работе В. Вайдлиха вводится понятие *активной* переменной x, которая может усиливать или подавлять *пассивную* переменную y. Активная переменная x определяется как *кооперативная* по отношению к пассивной переменной y, если x усиливает y при больших значениях x, но подавляет y при малых x (т.е. кооперативная переменная x стремится ассимилировать (согласовать) значение y). Активная переменная x называется *антагонистической* по отношению к пассивной переменной y, если x подавляет y при больших x, но усиливает y для малых значений x (т.е. антагонистическая переменная стремится увеличить разницу между y и x).

Вайдлих описывает взаимодействие переменных x и y дифференциальными уравнениями логистического типа:

---

1 *Weidlich W.* Указ. соч.

2 Данная работа появилась в результате обсуждения модели Вайдлиха со студентами Московского физико-технического института (МФТИ) в процессе освоения материала курса "Моделирование исторических процессов".

$$dx/dt = x(a(y) * s - x) \qquad (1)$$

$$dy/dt = y(b(x) * s - y) \qquad (2)$$

где $a(y)$ и $b(x)$ - функции влияния.

Какой вид должна иметь функция влияния, чтобы обеспечивать кооперативное или антагонистическое взаимодействие активной и пассивной переменных? В качестве простейшего варианта Вайдлих рассматривает ступенчатую функцию.

В случае кооперативного взаимодействия активной переменной x и пассивной переменной y определим функцию влияния $b(x)$ следующим образом:

$$b(x) = \begin{cases} b_- < 0 \ \text{для} \ 0 < x < x_s \\ b_+ > 0 \ \text{для} \ x_s < x < \infty \end{cases}, \qquad (3)$$

где b_- , b_+ - константы, а x_s - пороговое значение, при котором скачком меняется направление воздействия активной переменной x на пассивную y.

В случае антагонистического взаимодействия переменных определим $b(x)$ в виде следующей ступенчатой функции:

$$b(x) = \begin{cases} b_+ > 0 \ \text{для} \ 0 < x < x_s \\ b_- < 0 \ \text{для} \ x_s < x < \infty \end{cases}. \qquad (4)$$

Как следует из (2), для малых значений $x < x_s$ активная переменная x усиливает y, а для больших $x > x_s$ - уменьшает y.

Таким же образом можно ввести и оба варианта воздействия y на x в уравнении (1), определив функцию влияния $a(y)$ с помощью констант a_+ и a_-, а также порогового значения y_s.

В итоге получим четыре варианта взаимодействия переменных x и y:

a) переменная x кооперативно влияет на y, и переменная y кооперативно связана с x;

b) переменная x антагонистично влияет на y, и y антагонистично влияет на x;

c) переменная x кооперативно влияет на y, а y антагонистично связана с x;

d) переменная x антагонистично влияет на y, а y кооперативно влияет на x.

Система уравнений (1)-(2) решается аналитически ввиду ступенчатого вида функций $a(x)$ и $b(y)$. Так, при рассмотрении первого варианта, в случае, когда x и y усиливают друг друга, система (1)-(2) принимает вид:

$$dx/dt = x(a * s - x)$$
$$dy/dt = y(b * s - y)$$

Решениями такой системы являются функции:

$$x(t) = \frac{x_0 a_+ s * exp(a_+ st)}{x_0 exp(a_+ st) + (a_+ s - x_0)},$$

$$y(t) = \frac{y_0 b_+ s * exp(b_+ st)}{y_0 exp(b_+ st) + (b_+ s - y_0)},$$

где x_0 и y_0 - начальные значения $x(t)$ и $y(t)$ при $t = 0$.

Исследование системы (1)-(2), проведенное Вайдлихом для всех четырех рассмотренных вариантов взаимодействия двух переменных, привело к построению качественных характеристик поведения решений, изображенных на рис. 1 - 4. Как следует из рис. 1 и 2, соответствующих симметричным отношениям между x и y, в этих случаях (**a** и **b**) имеются две точки равновесия, и все траектории стремятся к одному из двух равновесных состояний. Качественное исследование поведения решения системы (1)-(2) при асимметричных отношениях между x и y (случаи **c** и **d**, одна переменная кооперативная, другая антагонистическая) иллюстрируется на рис. 3 и 4. Здесь фазовые траектории представляют собой циклические процессы.

Эволюция социума: интерпретация модели Вайдлиха

Как отмечалось выше, В. Вайдлих дал интерпретацию модели (1)-(2) в терминах взаимоотношений пары "народ - правительство" (в другой терминологии это может быть пара "законодательная

Рис. 1-4. Фазовые траектории модели Вайдлиха [*]

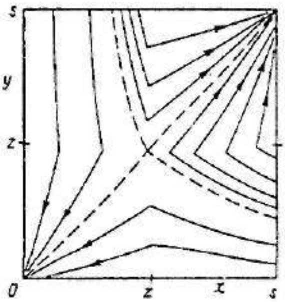


Рис. 1.
x и y - кооперативные переменные (случай **a**)

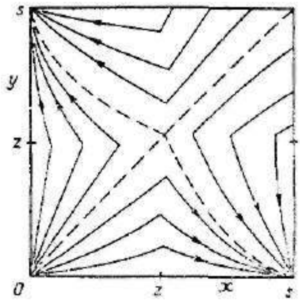


Рис. 2.
x и y - антагонистические переменные (случай **b**)

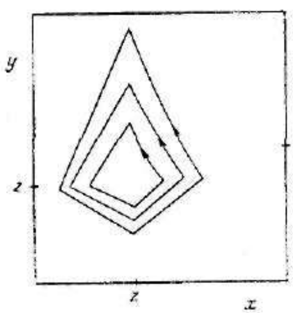


Рис. 3.
x кооперативно влияет на y, а y антагонистично влияет на x (случай **c**)

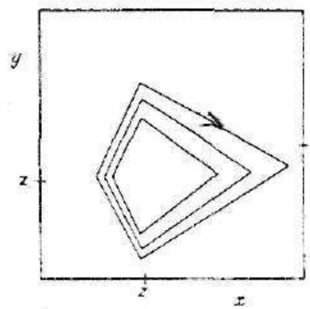


Рис. 4.
x антагонистично влияет на y, а y кооперативно влияет на x (случай **d**)

Значения параметров:

$$a),\ b) \begin{cases} x_S = y_S = z;\ s = 2z; \\ a_+ = b_+ = 1;\ a_- = b_- = -1; \end{cases}$$

$$c),\ d) \begin{cases} a_+ = b_+ = 2;\ a_- = b_- = -1; \\ z = 1;\ s = 10^{10}. \end{cases}$$

На рисунках пунктиром показаны сепаратрисы.

[*] См.: *Плотинский Ю.М.* Математическое моделирование динамики социальных процессов. М., 1992. С. 88.

власть - исполнительная власть"). Будем рассматривать переменную x как степень влияния и участия народа в демократических процессах принятия решений, а переменную y - как степень силы и власти правительства [1]. В зависимости от исторических обстоятельств, традиций, менталитета возможны различные типы взаимодействия народа и правительства (имея в виду различные сочетания кооперативного и антагонистического поведения элементов рассматриваемого социума).

Пусть в изучаемой политической системе поведение обеих сторон является взаимосогласованным, и обе переменных (x и y) являются кооперативными (случай **а**). Тогда в соответствии с определением (3) взаимодействие сторон строится по следующему правилу:

- если влияние народа в процессе принятия решений (через органы народовластия) является существенным (т.е. значение x велико), то он поддерживает деятельность правительства; если же участие народа в управлении незначительно (x мало), политика правительства встречает противодействие;
- если правительство обладает значительным влиянием и властью (y велико), то оно поддерживает демократические институты общества; если же реальная власть правительства слаба, и оно опасается потери авторитета и власти, то оно стремится ограничить деятельность органов народовластия.

Фазовые траектории процесса в этом случае изображаются рис. 1, и, следовательно, политическая эволюция социума направлена к одному из двух положений равновесия:

1) состояние *"гармоничной демократии"* (x и y велики) - влияние народа существенно, он поддерживает сильное правительство, которое в свою очередь доверяет народу (точка равновесия находится в правом верхнем углу фазового портрета на рис. 1);

2) состояние *"противоборствующей демократии"* (x и y малы) - институты народовластия слабы, народ не одобряет и саботирует политику правительства, а правительство, не обладая сильной властью, не считается с общественным мнением и подавляет волеизъявление народа (точка равновесия находится в левом нижнем углу фазового портрета на рис. 1).

---

[1] Вайдлих не рассматривает проблему измерения значений переменных x и y. Не затрагивая этот вопрос, отметим, что в принципе такое измерение возможно - например, путем построения экспертных оценок.

Очевидно, второе положение равновесия является нежелательным для социума, оно чревато худшим вариантом анархии, когда ни народ, ни правительство не обладают властью, и ситуация становится бесконтрольной. Какие траектории приводят к этому положению? Как следует из рис. 1, те из них, которые начинаются из любой точки, находящейся ниже второй сепаратрисы (первая проходит через обе равновесные точки). Как следует управлять ситуацией, если по модели прогнозируется неблагоприятный исход? Для этого надо изменять положение начальной точки, переводя ее скачком в ту область фазовой плоскости, которая расположена выше второй сепаратрисы. Для иллюстрации обратимся к рис. 5, который, как и рис. 1, воспроизводит фазовые траектории системы в случае *а*.

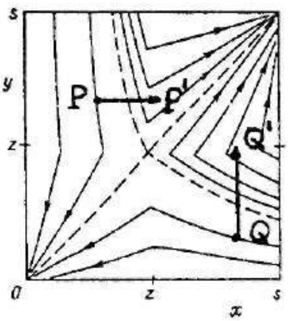


Рис. 5. Фазовые траектории модели Вайдлиха в случае **а**: *x* и *y* - кооперативные переменные. Перевод начальных точек *P* и *Q* в “благоприятную зону притяжения.”

Пусть текущая ситуация характеризуется начальной точкой *P* на фазовой плоскости рис. 5. Развитие этой ситуации, как следует из рис. 5, приводит к нежелательной равновесной точке 0. В точке *P* правительство обладает достаточно сильной властью ($y > z$), в то время как влияние народа гораздо слабее ($x < z$). Действия правительства, направленные ("рывком") на повышение роли институтов народовластия, означали бы перевод точки *P* в точку P', находящуюся в "зоне притяжения" положения равновесия, названного гармоничной демократией. Если рассмотреть в качестве другой неблагоприятной начальной ситуации точку *Q*, в которой при высокой степени влияния народа ($x > z$) правительство не обладает достаточной властью ($y < z$), то повышение роли правительства в обстановке общественного согласия также означало бы перевод точки *Q* в точку Q', находящуюся в "благоприятной зоне притяжения".

В упомянутой работе Вайдлиха рассмотрена конкретная историческая ситуация, интерпретация которой проводится в терминах данной модели.

Как отмечалось выше, исторические обстоятельства, традиции и менталитет общества могут обусловить антагонистическое взаимодействие правительства и народа [1]. В этом случае власть и авторитет правительства (y велико) используются для репрессий против населения, а отсутствие авторитета у правительства (y мало) способствует развитию демократических институтов. С другой стороны, значительное влияние народных масс (x велико) приводит к уменьшению авторитета правительства, а отсутствие влияния народа (x мало) подразумевает терпимость и поддержку сильной власти. Эта модель характерна для случая **b** (переменная x антагонистично влияет на y, и y антагонистично влияет на x) и также имеет два положения равновесия:

- состояние *диктатуры* (y велико, $x = 0$; левый верхний угол фазового портрета на рис. 2);
- состояние *анархии* ($y = 0$, x велико; правый нижний угол фазового портрета на рис. 2); народ саботирует решения безвольного правительства.

Аналогично можно рассмотреть и интерпретацию модели в случаях **c** и **d**, при асимметричных отношениях между x и y [2].

Модификации модели Вайдлиха

Итак, даже беглый анализ модели Вайдлиха убеждает в том, что она представляет интерес для исследования вариантов эволюции социума при рассмотренных предположениях о характере взаимодействия народа и правительства. Возникает, однако, вопрос - в какой мере полученные выводы зависят от конкретного вида функций влияния $b(x)$ и $a(y)$, заданных формулами (3), (4)? Ведь в соответствии с этими формулами, направление взаимодействия в данной паре меняется скачком при достижении активной переменной заданного порогового значения. Что же касается изменений в характере реальных социально-политических процессов, то для них типичными являются более постепенные переходы, требующие определенного времени. Что, если в модели Вайдлиха заменить ступенчатые функции влияния на другие, более плавные? Это усложняет проблему аналитического решения системы уравнений (1)-(2), но с помощью численных методов можно построить фазовые траектории при различных модификациях функций влияния $b(x)$ и $a(y)$. Авторами данной работы были разработаны специальные про-

---

[1] См.: *Плотинский Ю.М.* Указ. соч., с.90-91.

[2] См.: *Weidlich W.* Указ. соч.

граммы, с помощью которых были проведены модификации модели Вайдлиха в нескольких вариантах и получены (с помощью численных методов) соответствующие решения системы (1)-(2).

I.

Рассмотрим сначала модификации исходной модели Вайдлиха (МВ), в которых предлагается заменить функции $a(y)$ и $b(x)$ на другие, ведущие себя в целом аналогично $a(y)$ и $b(x)$, но непрерывные в точках x_s и y_s соответственно.

Обратимся вначале к стандартной функции Паскаля *arctg* с соответствующим аргументом:

$$b(x) = b_0 * arctg((x - s) * k), \qquad (5)$$

где $b_0 = (+/-)s$, s - точка скачка, а k - коэффициент, определяющий крутизну перехода. На рис. 6 - 8 показан вид этой функции при значениях k, равных 1000, 1, 1/20 соответственно (чем больше величина k, тем больше крутизна). Задание функции влияния в виде (5) представляется более оправданным с содержательной точки зрения (в сравнении с (3)).

Программа, использовавшаяся нами для численного решения системы (3) с функциями влияния вида (5), включает главный файл HISTORY и три модуля с аппаратными процедурами - поддержки графического режима и настройки области вывода с экрана на принтер; поддержки принтера; поддержки мыши. В процессе работы на экран выводится координатная рамка и курсор мыши. Установив курсор в выбранную точку внутри рамки и "кликнув" мышь, получим на экране соответствующую траекторию. График строится вплоть до момента остановки процесса с помощью мыши.

На рис. 9-12 представлены фазовые траектории, порожденные модифицированной моделью Вайдлиха (далее МВМ), для всех четырех случаев **a**, **b**, **c**, **d**, определяющих различные типы взаимодействий в системе (1)-(2) при значении коэффициента $k \approx 0,1$ (когда функция влияния имеет форму сглаженной ступеньки). Как следует из рис. 9 и 10, качественная картина фазовой плоскости остается той же, когда отношения между переменными x и y симметричные ($a > 0$, $b > 0$ или $a < 0$, $b < 0$). Напротив, рис. 11, 12 показывают, что вместо циклов, являющихся решениями МВ в случае асимметричных отношений между переменными x и y (см. рис. 3 и 4), траектории решения МВМ сходятся к устойчивому фокусу.

Рис. 6 -8. Графики функции влияния
$b(x) = b_0 * arctg((x - s) * k)$

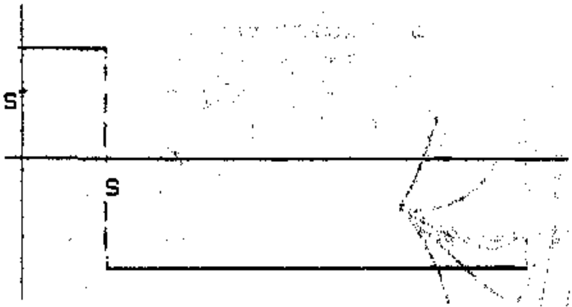


Рис. 6. k = 1000

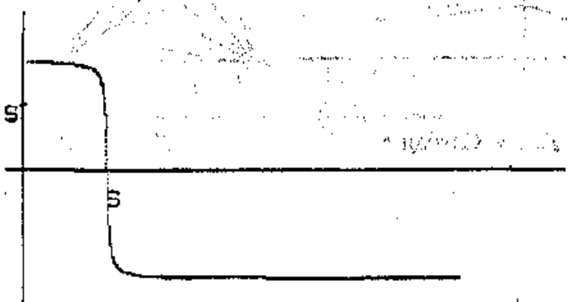


Рис. 7. k = 1

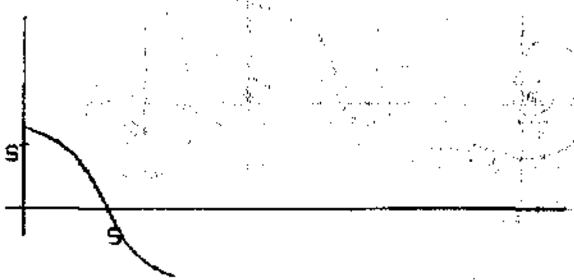


Рис. 8. k = 1/20

Рис. 9 - 12. Фазовые траектории
модифицированной модели Вайдлиха
$(k \approx 0,1)$

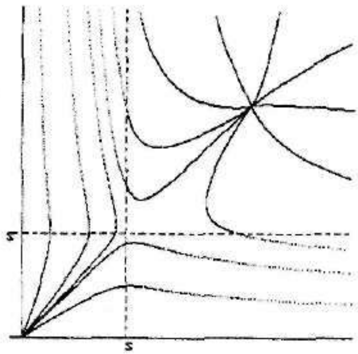


Рис. 9. Случай **a**.

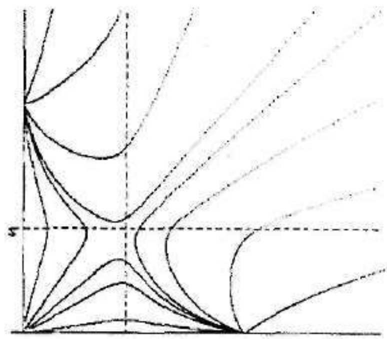


Рис. 10. Случай **b**.

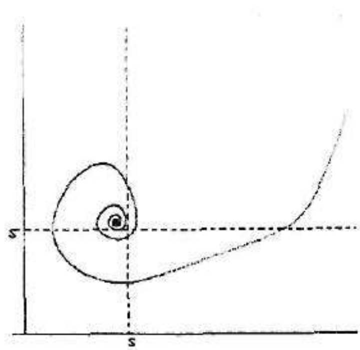


Рис. 11. Случай **c**.

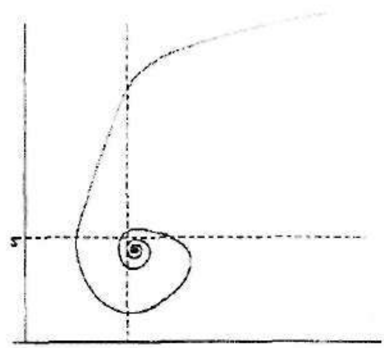


Рис. 12. Случай **d**.

Данный вывод может быть подтвержден аналитически. Найдем точки равновесия системы МВМ:

$$\dot{x} = x(\, a*arctg(\, y - y_S\,) - x\,) = 0$$
$$\dot{y} = y(\, b*arctg(\, x - x_S\,) - y\,) = 0$$

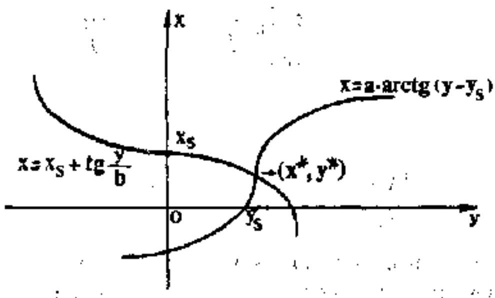
Точку (0,0) - исключим (тривиально). Тогда:

$$\begin{aligned} a*arctg(\, y - y_S\,) &= x, \\ b*arctg(\, x - x_S\,) &= y. \end{aligned} \qquad (6)$$

$$=> \qquad \begin{aligned} x &= x_S + tg\, y\, /\, b, \\ x &= a*arctg\, (\, y - y_S\,). \end{aligned}$$

Решения этой системы проиллюстрируем графиками (рис. 13).

1. $a>0,\ b<0$



2. $a<0,\ b>0$

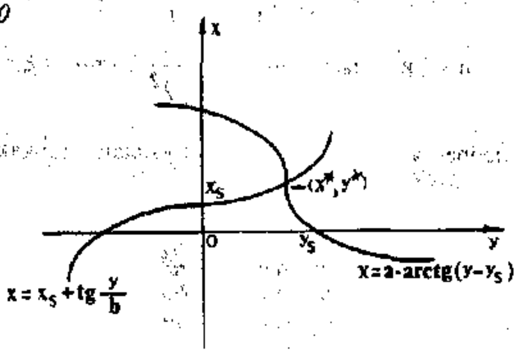


Рис. 13. Графическое решение системы (6).
Использованы значения параметров $b*arctg\, x_S > y_S$, $a > x_S$.

Как видно из рис. 13, в обоих случаях $x^*>0$, $y^*>0$, где (x^*, y^*) - точка равновесия.

Линеаризуем МВМ вблизи (x^*, y^*):

$$x = x^* + \xi,$$
$$y = y^* + \eta,$$

где ξ, η - малые отклонения от положения равновесия.

Как известно,

$$arctg\,(x - x_s) = arctg\,(x^* - x_s + \xi) \approx$$
$$\approx arctg\,(x^* - x_s) + \frac{1}{1+(x^* - x_s)^2}\xi + O(\xi^2).$$

Учитывая, что

$$a * arctg\,(y^* - y_S) - x^* = 0,$$
$$b * arctg\,(x^* - x_S) - y^* = 0,$$

получаем:

$$\dot{\xi} = (x^* + \xi)\left(\frac{a}{1+(y^* - y_S)^2}\eta - \xi + O(\eta^2)\right),$$
$$\dot{\eta} = (y^* + \eta)\left(\frac{b}{1+(x^* - x_S)^2}\xi - \eta + O(\xi^2)\right).$$

Пренебрегая членами второго и высших порядков малости по ξ и η, получаем:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -x^*\xi + \dfrac{ax^*}{1+(y^* - y_S)^2}\eta, \\ \dot{\eta} = \dfrac{by^*}{1+(x^* - x_S)^2}\xi - y^*\eta. \end{cases}$$

Обозначив $\binom{\xi}{\eta} = X$, $\qquad \begin{Bmatrix} -x^* & \dfrac{ax^*}{1+(y^*-y_S)^2} \\ \dfrac{by^*}{1+(x^*-x_S)^2} & -y^* \end{Bmatrix} = A,$

запишем систему в векторной форме: $\dot{X} = AX$.

Будем искать решения в виде: $x = x_0\, e^{\lambda t}$;

Тогда:

$$X_0\, \lambda = AX_0\ ,$$

=> $$(A - \lambda E)X_0 = 0 \text{ и } \left|A - \lambda E\right| = 0$$

- условия существования нетривиальных x_0.

Т.к. нас интересуют решения колебательного характера, то ищем λ в виде:

$$\begin{matrix} \lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1\,, \\ \lambda_2 = \alpha_1 - i\beta_1 \end{matrix} \qquad (\lambda_1 = \overline{\lambda_2})$$

В силу известных свойств инвариантности коэффициентов характеристического уравнения $\left|A - \lambda E\right| = 0$, получаем:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = S_p\, A = -(x^* + y^*) = 2\alpha_1$$

=> $\lambda_1 < 0$ и точка (x^*, y^*) - аттрактор типа"фокус"

В "классической" МВ точка равновесия (x_S, y_S) была неустойчива, т.е. в системе наблюдались незатухающие колебания. В модели же МВМ колебания затухают со временем и решение стремится к (x^*, y^*).

Исходя из того, что незначительная модификация модели в случае асимметричных отношений между переменными x и y привела к качественному изменению в поведении системы, можно заключить, что наличие в ней устойчивых колебаний с постоянной частотой и амплитудой не есть свойство самой системы, а привнесено особенностями модели. Факт обнаружения в системе затухающих колебаний представляется весьма естественным, т.к. он находится в соответствии как с аналогичными результатами для известной модели Лотка-Вольтерра, возмущенной членами вида (x^2), так и с общефилософским принципом "гомеостазиса мироздания".

* * *

Отметим, что сглаживание ступенчатой функции влияния является важной, но не единственной модификацией модели Вайдлиха, повышающей степень ее адекватности реальным социально-политическим процессам. Среди ряда других модификаций МВ, проводившихся нами, наиболее интересными представляются следующие две.

1) Переходный процесс, задаваемый с помощью функции (5), может обладать инерционностью, в результате чего смена направления воздействия активной переменной на пассивную может произойти с "*перехлестом*": *непосредственно после перехода функция* влияния достигает высокого значения, затем постепенно снижается до стационарного уровня "ступеньки" (рис. 14). Качественное поведение такой системы с инерционностью иллюстрируется рис. 15 (рассмотрен случай кооперативных переменных x и y). Сравнение с рис. 9 показывает, что точки притяжения остаются теми же, но для целого "пучка" траекторий характерно не прямое следование в собирающий центр, а предварительное отклонение в сторону от него.

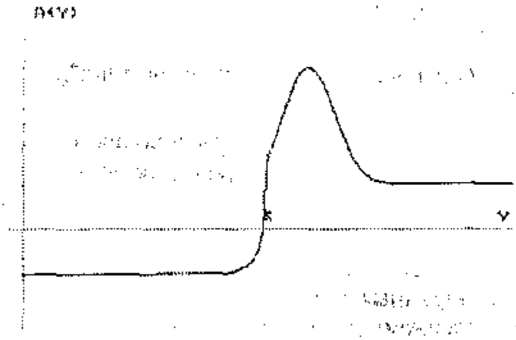


Рис. 14. **Вид функции влияния для переходного процесса в системе с инерционностью.**

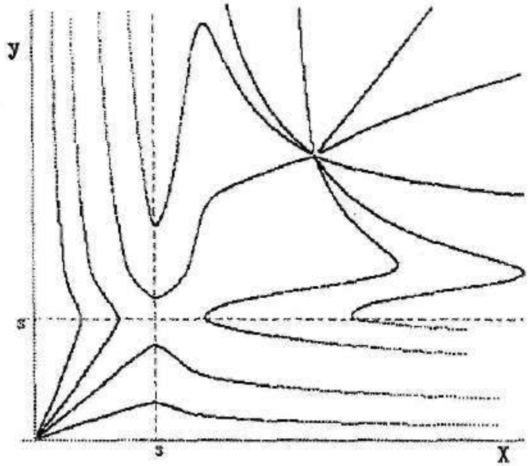


Рис. 15. Фазовый портрет МВМ с инерционностью (случай **а**).

2) При изучении переходных процессов в линейных непрерывных динамических системах часто рассматривают колебательные переходные процессы (рис. 16). Фазовые траектории в этом случае имеют вид, показанный на рис. 17. Фазовый портрет при наличии гармонических возмущений приобретает новое качество: число точек устойчивости увеличивается.

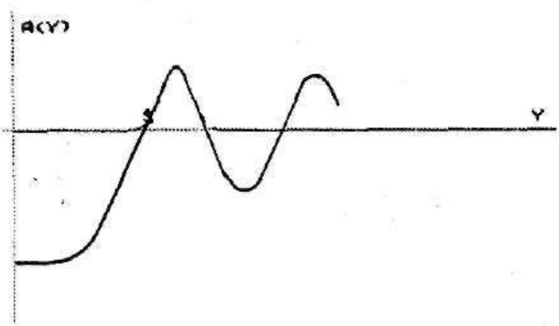


Рис. 16. Вид функции влияния в случае колебательного переходного процесса.

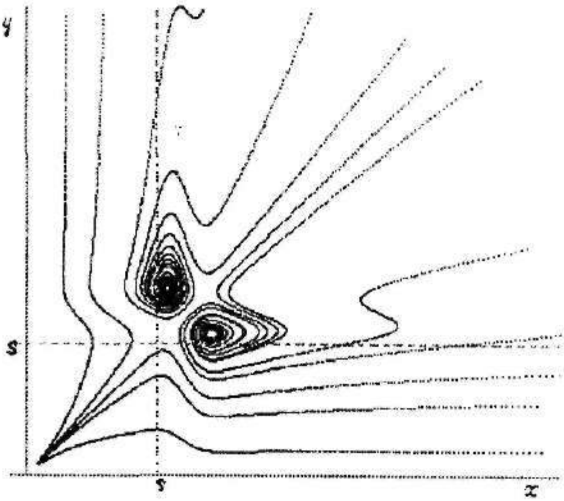


Рис. 17. Фазовый портрет МВМ при наличии гармонических возмущений (случай **а**).

II

Перейдем теперь к более радикальной модификации модели Вайдлиха. Предположим, что функция влияния определяется не ступенчатой формой, а "горкой", определив вид функций $a(y)$ и *в(x)* следующими формулами:

$$\begin{cases} a(y) = exp\,(-k\,(x - \frac{s}{2})^{\,2}) - 0{,}5 \\ b(x) = exp\,(-k\,(y - \frac{s}{2})^{\,2}) - 0{,}5\,, \end{cases}$$

где $\frac{s}{2}$ - середина диапазона изменений x или y; k - показатель крутизны экспоненты, положительное число; величина 0,5 - соответствует половине максимального значения функций $a(x)$ и $b(y)$.

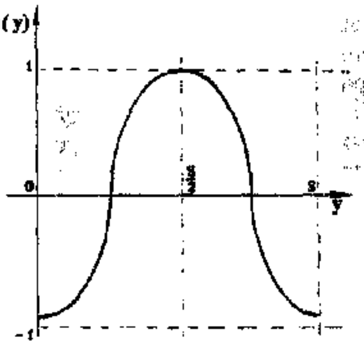


Рис. 18. Модификация функции влияния: "горка" вместо "ступеньки".

Вид этой зависимости представлен на рисунке 18 для функции влияния параметра *a(y)*. Для зависимости *b(x)* график будет иметь такой же вид. Эта зависимость может описывать ситуацию после переворота сверху. Первоначально правительство слабо, и влияние народа также не велико; поведение обоих элементов системы является антагонистичным. Однако, с нарастанием силы правительства растет и влияние народа. Поведение в системе становится взаимно-кооперативным. В некоторый момент эта кооперация достигает пика, когда и правительство, и народ сильны, но при дальнейшем увеличении влияния правительства, влияние народа постепенно спадает, и в некоторый момент народ становится совершенно индифферентен к действиям правительства. Однако, дальнейшее увеличение власти правительства приводит к антагонистическим отношениям народа с правительством. Точно такое же объяснение можно дать для зависимости *b(x)*, поменяв только соответствующим образом роли правительства и народа.

Итак, нам надо получить качественное решение системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a(y)s - x), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(b(x)s - y); \end{cases} \qquad (7)$$

где

$$\begin{cases} a(y) = \exp\left(-k\left(x - \frac{s}{2}\right)^2\right) - 0{,}5\ , \\ b(x) = \exp\left(-k\left(y - \frac{s}{2}\right)^2\right) - 0{,}5\ . \end{cases} \qquad (8)$$

Численное решение данной системы можно получить с помощью метода Эйлера. Программа построения и вычисления решений была написана в интегрированной среде Turbo Pascal 7.0. В среднем вычисления на IBM PC 386 занимали 20-40 секунд вместе с построением семейства кривых на фазовой плоскости *(xy)*.

Из графика рис. 19 понятно, что при большинстве значений x и y система по прошествии некоторого времени придет к анархии, то есть к ситуации, когда $x = 0$, $y = 0$, при которой в стране царит безвластие. Естественно, ни власти, ни народ таким положением вещей довольны быть не могут, и для них существует единственный спасительный путь: надо попасть на прямую *AB*, которая в конце концов приведет к устойчивой точке *A*, где влияние власти и народа распределено поровну, но ограничено, т.е. в стране действует демократический режим.

Теперь изменим крутизну экспоненты в формуле (8), положим $k = 0{,}1$. Тогда получим фазовый портрет, изображенный на рис 20.

Из фазового портрета рис. 20 понятно, что в поведении системы произошли серьезные изменения. Очевидно, что "прямая благополучия" *AB* на рис. 19, является лишь предельным случаем целого семейства кривых, отделенных от остальных решений сепаратрисой *CD* (как видно на рис. 20). Теперь у правительства и народа нашей воображаемой страны гораздо больше шансов прийти в благополучную точку *A* спустя некоторый промежуток времени. Для этого необходимо лишь попасть в достаточно обширную область *CDBC*, где любая траектория приведет к нужной цели. Можно высказать предположение, что при дальнейшем сжатии "экспоненциального горба" (см. рис. 18), мы получим все большее и большее расширение области *CDBC*.

* * *

Рассмотрев модель Вайдлиха и ряд ее модификаций, естественно задаться вопросом: что могут дать подобные модели исследователю социальных процессов?

Во-первых, отметим, что модель Вайдлиха, как и любая модель вообще, дает лишь упрощенное описание изучаемой системы (в данном случае - системы "народ - правительство"). Реальная система всегда сложнее, чем ее модель. Вопрос однако, заключается в том, насколько адекватной является построенная модель, отражает ли она основные "механизмы" взаимодействия элементов изучаемой системы. На наш взгляд, в данном случае ответ на этот вопрос может быть положительным - с учетом того уровня агрегирования

Рис. 19-20. Фазовые траектории модифицированной модели (7)-(8)

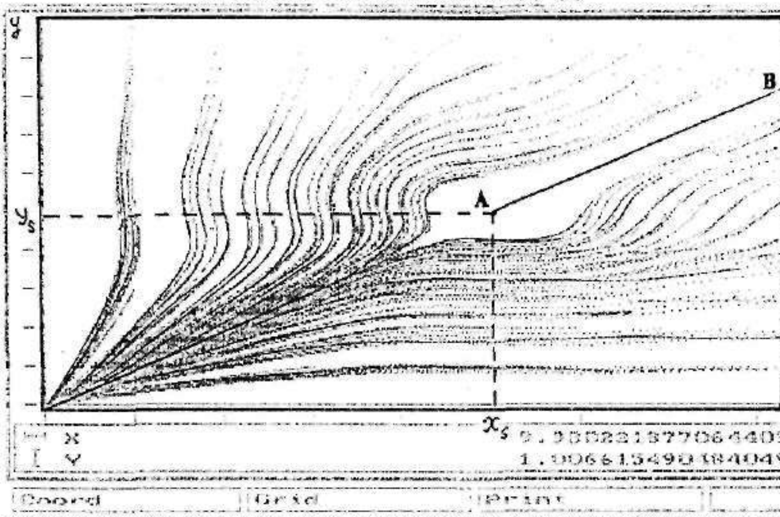


Рис. 19. Параметры модели: $s = 10$; $x_S = 5$; $y_S = 5$; $k = 1$.

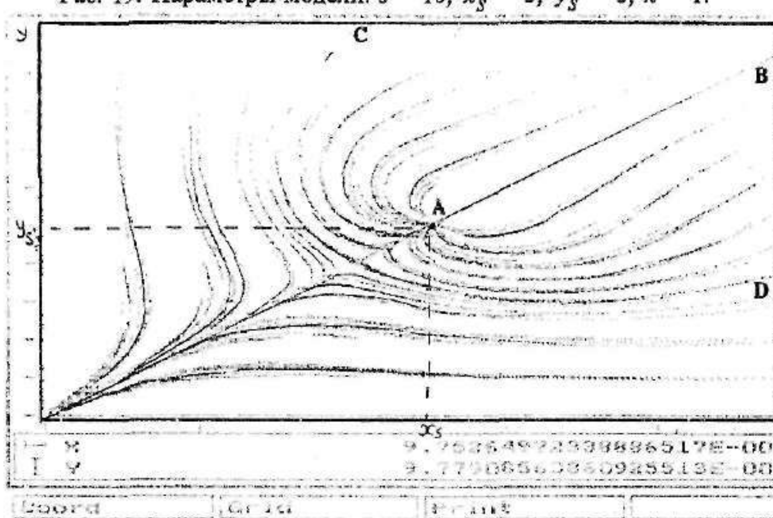


Рис. 20. Параметры модели: $s = 10$; $x_S = 5$; $y_S = 5$; $k = 0,1$.

при использовании макропеременных, который вводится Вайдлихом при рассмотрении эволюции социума.

Во-вторых, подчеркнем еще раз, что полученные результаты моделирования дают представление о том, какие *типы* развития отношений между народом и правительством могут быть в системе, описываемой моделью Вайдлиха (или ее модификациями). Это теоретическое знание, которое может использоваться политологами, аналитиками для прогнозирования развития политических ситуаций, принятия соответствующих решений, направленных на устранение неблагоприятных (кризисных) вариантов.

Что касается возможностей использования подобных моделей в исторических исследованиях, то, на наш взгляд, внимания заслуживают два аспекта.

1) Модель Вайдлиха и ее модификации дают историкам конструктивный пример построения теоретического знания в области социальных наук; как известно, любая теория достигает зрелости, когда ее основные категории и взаимосвязи между ними могут быть описаны на формальном уровне. В принципе, можно представить себе появление в XXI веке, например, "теории революций", которая позволит с помощью моделей изучать закономерности динамики социальных систем в периоды революционного развития.

2) Модель Вайдлиха может быть полезной в исследованиях историков и в более прагматическом смысле. Предположим, имеющиеся источники позволяют построить "фазовую траекторию", характеризующую динамику соотношения сил внутри пары "народ - правительство" в изучаемой стране в определенный период времени. Классификация фазовых портретов, полученная при использовании MB и ее модификаций, может дать историку дополнительный аргумент в его интерпретации характера эволюции социума. С другой стороны, набор фазовых портретов, полученных в результате исследования модели Вайдлиха, дает теоретическую основу для рассмотрения альтернатив исторического развития, когда мы знаем, по какой траектории реально развивался изучаемый процесс.

В заключение отметим, что дальнейшие работы по модификации и исследованию MB могут выявить еще более интересные и тонкие аспекты в поведении социальных систем и тем самым приблизить нас к пониманию сути сложных и противоречивых процессов, происходящих в обществе.